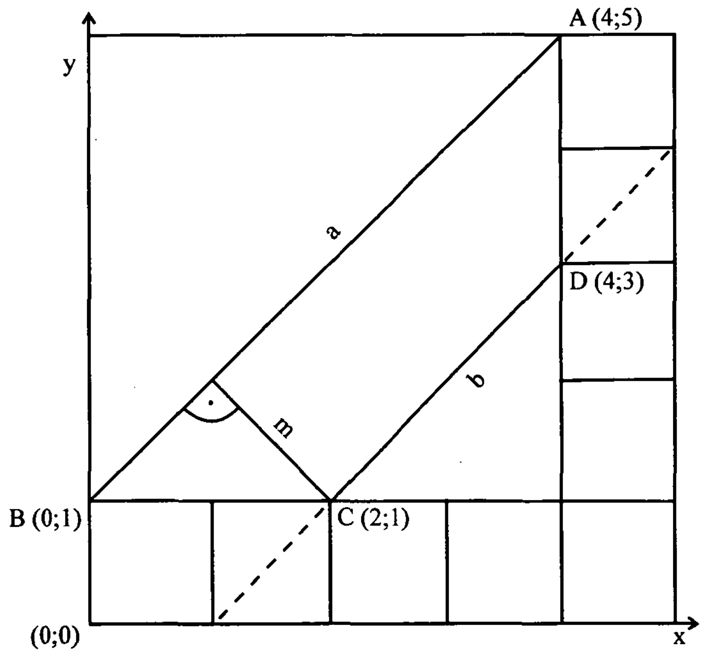
DR. VÁRMONOSTORY ENDRE
főiskolai tanár
SZTE JGYPK Tanító-és Óvóképző Intézet
Matematika Szakcsoport
Szeged

A Szendrei János Matematika Verseny feladatainak megoldásai

Előző cikkünkben [1] a Szendrei János Matematika Verseny feladatait ismertettük. Most a részletes kidolgozást igénylő feladatokat megoldjuk, valamint a tesztkérdésekre adott helyes válaszokat megadjuk.

Részletes kidolgozást igénylő feladatok megoldásai

1. feladat megoldása. A következő ábrán felrajzoltuk koordinátarendszerben a szivacs útját.



Az ábrából látjuk, hogy az x, illetve az y tengely irányába történő eltoláskor a szivacs összesen 9 egység négyzetet színez be. Majd a ferde eltolásnál az ábrán látható $ABCD$ trapézt színezi be. Az ábrán lévő jelöléseket alkalmazva kapjuk, hogy

$a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Másrészt a $2 = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2}$-ből $m = \sqrt{2}$ adódik. Ezek felhasználásával az $ABCD$ trapézt területe:

$$T_{ABCD}=\frac{a+b}{2}m=\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=6.$$

A szivacs így összesen $9+6=15$ területegységet színez be.

2. feladat megoldása. Először számoljuk össze az összes esetek számát. A következő esetekben lehet a kihúzott számok összege 6:
a) A felírt számok mindegyike 2, azaz a 2, 2, 2 sorozatot húzzuk. Ez 1 esetben lehetséges.
b) A felírt számok különbözők. Ekkor az 1, 2, 3 számokkal jelzett különböző golyókat húzzuk egymásután. Ezen esetek száma, azaz az 1, 2, 3 számok lehetséges kihúzási sorrendjeinek a száma $3!=6$.
Más esetekben nem lehet a kihúzott számok összege 6. Az összes esetek száma: $1+6=7$.
A kedvező esetek száma nyilván 1. A keresett valószínűség a kedvező esetek száma osztva az összes esetek számával, ami $\frac{1}{7}$.

3. feladat megoldása. Sanyi, Kati és Évi sebességét ebben a sorrendben jelölje v_1, v_2 és $,v_3$. Legyen x a távolság hossza méterben. Sanyi célba érkezésekor Kati $x-300$, Évi pedig $x-400$ métert tett meg. Mivel ugyanannyi idő alatt tették meg ezeket a távolságokat, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{x-300}{v_2}=\frac{x-400}{v_3}.$$

Másrész, Kati célba érésig x métert tett meg. Ugyanannyi idő alatt Évi $x-110$ métert tett meg, azaz

$$\frac{x}{v_2}=\frac{x-110}{v_3}.$$

Az előzőekből kapjuk, hogy

$$\frac{v_3}{v_2}=\frac{x-400}{x-300}=\frac{x-110}{x},$$

azaz

$$\frac{x-400}{x-300}=\frac{x-110}{x}.$$

Az utóbbi egyenletből rendezés után a következő egyenlet adódik:
$10x=33000$, azaz $x=3300$. A versenyt 3300 méteres távon rendezték meg.

4. feladat megoldása. Tegyük fel, hogy vannak olyan $a,b,c\in Z$ számok, amelyekre a $D=b^2-4ac=123$ összefüggés teljesül. A b^2 nem lehet páros szám, mert akkor a b^2-4ac is páros szám lenne. Így a b^2 csak páratlan szám lehet, de akkor a b is páratlan. Ezért a $b=2n+1$ alakban írható, ahol $n\in Z$. Ekkor $(2n+1)^2-4ac=123$, amiből $4(n^2+n-ac)=122$. Az utóbbi nem teljesülhet, mivel a 122 nem osztható 4-gyel. Így ellentmondáshoz jutunk, azaz nincsenek olyan $a,b,c\in Z$ számok, amelyekre teljesül, hogy $b^2-4ac=123$.

Most legyen $b^2 - 4ac = 125$, ahol $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Mivel a 125 páratlan szám, így az előző gondolatmenet szerint a b csak páratlan szám lehet. Legyen $b = 2n+1$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $b = 2n+1$ értéket a $b^2 - 4ac = 125$ összefüggésbe behelyettesítve rendezés után kapjuk, hogy $n^2 + n - ac = 31$. Az utóbbi összefüggést az $n = 5$, $a = 1$ $c = -1$ értékek kielégítik. A $b = 11$, $a = 1$ és $c = -1$ értékek esetén a diszkrimináns értéke 125, azaz lehet a diszkrimináns értéke 125.

5. feladat megoldása. A következő eseteket vizsgáljuk:

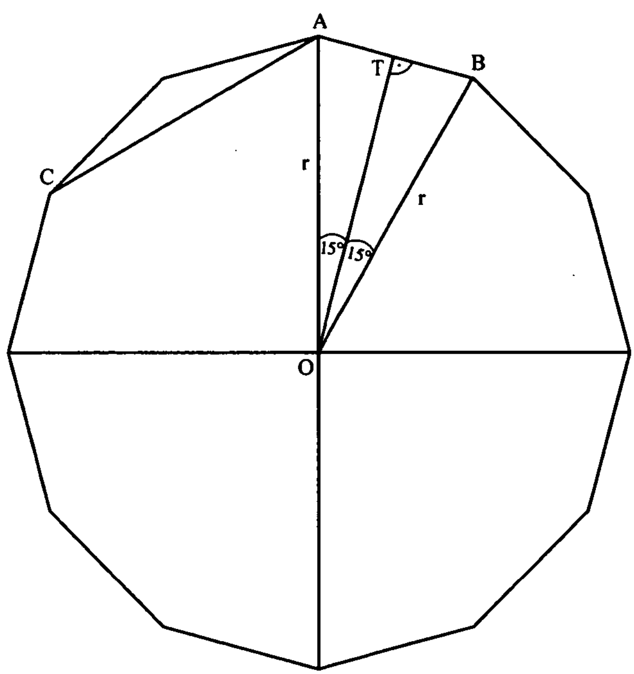
a) $x^2 - x - 1 \neq 0$ és $x + 2 = 0$. Ez $x = -2$ esetén teljesül.

b) $x^2 - x - 1 = 1$. Ekkor $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

c) $x^2 - x - 1 = -1$ esetén az $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Az $x + 2$ számnak párosnak kell lenni. Ekkor az $x_1 = 0$ a megoldás.

Az összes megoldások: -2, -1, 0 és 2.

6. feladat megoldása. Egy n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma $\frac{n(n-3)}{2}$. A feladat feltételei szerint $\frac{n(n-3)}{2} = 4n + 6$. Az utóbbi egyenlet ekvivalens az $n^2 - 11n - 12 = 0$ egyenlettel, amelynek gyökei: 12, illetve -1. Ezek közül csak a 12 felel meg a feladat feltételeinek, azaz a szabályos sokszög oldalainak a száma 12. Ez egy r sugarú körbe írható. A feladat megoldásához használjuk fel a következő ábrát:



A leghosszabb átló hossza $2r$, a legrövidebb átló hossza az ábrán látható AC átló, amely az r sugarú körbe írható szabályos hatszög oldalának a hossza. Az $AOB\sphericalangle = \frac{360^0}{12} = 30^0$. Az AOB egyenlőszárú háromszög, a T az alaphoz tartozó magasság talppontja. Az $AT = 4$, $AOT\sphericalangle = 15^0$. $\sin 15^0 = \frac{4}{r}$, amiből $r = \frac{4}{\sin 15^0}$. Mivel $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, ezért $r = \frac{16}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 4(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. A minimális átló hossza $AC = r = 4(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \approx 15{,}455$, a maximális átló hossza $2r = 8(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \approx 30{,}91$.

A tesztkérdésekre adott helyes válaszok

A tesztkérdések megoldásait a következő táblázat tartalmazza:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
A	C	D	D	B	C	B	B	C	D	C	A	C	A	D	C	B	B	D	A

IRODALOM

[1] Vármonostory Endre: A Szendrei János Matematika Verseny feladatai, Módszertani Közlemények, 2011/2. Szeged,